$\because OB /\!/ MN$，$\therefore \angle OCM=\angle COB=90°$.

$\because CG\perp AB$，$\therefore \angle FGB=90°$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle FGB$ 中，由 $\angle ABO=30°$，得 $\angle BFG=90°-\angle ABO=60°$，$\therefore \angle CFO=\angle BFG=60°$.

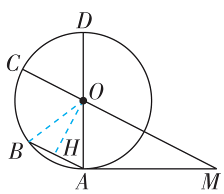
在 $\mathrm{Rt}\triangle COF$ 中，$\tan\angle CFO=\dfrac{OC}{OF}$，$OC=OA=3$，

$\therefore OF=\dfrac{OC}{\tan\angle CFO}=\dfrac{3}{\tan 60°}=\sqrt{3}$.

13. (1)【证明】连接 OB，如图.

$\because$ 点 C 为弧 BD 的中点，$\therefore \angle BOC=\angle COD$.

$\because \angle OAB=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，$\therefore \angle COD=\angle OAB$，$\therefore AB /\!/ CM$.



(2)【解】过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，如图.

$\because OA=OB$，$\therefore BH=AH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 20=10$(m). $\because AM$ 是切线，$\therefore OA\perp AM$，$\therefore \angle OAM=90°$. $\because AB /\!/ CM$，$\therefore \angle OAH=\angle AOM$，$\therefore \tan\angle OAH=\tan\angle AOM=\dfrac{AM}{AO}=2$，$\therefore \dfrac{OH}{AH}=2$，$\therefore OH=20$ m，$\therefore OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$(m)，

$\therefore AM=2OA=20\sqrt{5}$ m，

$\therefore OM=\sqrt{OA^2+AM^2}=\sqrt{(10\sqrt{5})^2+(20\sqrt{5})^2}=50$(m)，

$\therefore CM=OC+OM=(10\sqrt{5}+50)$ m.

14. (1)【证明】如图(1)，连接 OE，过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G.

$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 E，$\therefore OE\perp AD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是正方形的对角线，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=45°$.

$\because AO=AO$，$\therefore \triangle AGO\cong\triangle AEO$，

$\therefore OE=OG$.

$\because OE$ 为 $\odot O$ 的半径，$\therefore OG$ 为 $\odot O$ 的半径.

$\because OG\perp AB$，$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切.

【解】(2) 如图(1)，易得四边形 $AEOG$ 是正方形.

设 $AE=OE=OC=OF=R$.

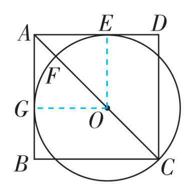
在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$\because AE^2+EO^2=AO^2$，$\therefore AO=\sqrt{2}R$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}+1$，

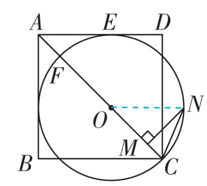
$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

$\because OA+OC=AC$，$\therefore \sqrt{2}R+R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$，

$\therefore R=\sqrt{2}$，$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$.



图(1)



图(2)

(3) 如图(2)，连接 ON，设 $CM=k$.

$\because CM:FM=1:4$，$\therefore CF=5k$，$\therefore OC=ON=2.5k$，

$\therefore OM=OC-CM=1.5k$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$ 中，由勾股定理得 $MN=2k$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CMN$ 中，由勾股定理得 $CN=\sqrt{5}k$.

又由(2)得 $FC=5k=2\sqrt{2}$，$\therefore k=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore CN=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

第七章　图形变换

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. C　【解析】从左边看有两层，底层是两个正方形，上层的左边有一个正方形. 故选 C.

2. B　【解析】

选项	解析	选项正误
A	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×
B	是轴对称图形，也是中心对称图形	√
C	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×
D	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×

刷有所得

轴对称图形的特征是一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能完全重合；

中心对称图形的特征是一个图形绕某一点旋转 180° 后，能与原图形完全重合.

3. C　【解析】由正方体表面展开图的第一行可知“中”与“梦”相对，由第二行可知“我”与“梦”相对，故剩下的两个字“的”与“国”相对，故选 C.

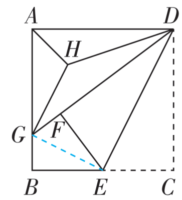
关键点拨

正方体表面展开图中，一线不过四，相间必相对，相连必相邻，田凹要弃之.

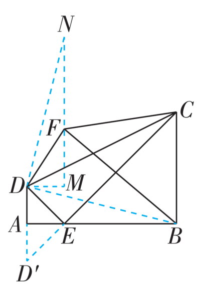
4. D　【解析】由作图过程可知，$\angle CBN=\angle BAC$. $\because CD$ 是 $\triangle ABC$

的角平分线，$\therefore \angle ACD=\angle BCD$. $\because \angle CAD+\angle ACD+\angle ADC=180°$，$\angle CBM+\angle BCM+\angle BMC=180°$，$\therefore \angle ADC=\angle BMC$，$\therefore \angle BDM=\angle BMD$，$\therefore BM=BD$，故 D 选项一定正确. 故选 D.

5. A 【解析】如图，连接 GE. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$\therefore \angle B=\angle C=\angle BAD=\angle ADC=90°$，$AB=BC=CD=DA=2$. $\because$ 点 E 是 BC 边的中点，$\therefore BE=CE=1$. $\because$ 将 $\triangle DCE$ 沿直线 DE 翻折得 $\triangle DFE$，$\therefore \angle EFD=\angle C=90°$，$CE=FE=BE=1$，$DC=DF=2$，$\therefore \angle GFE=\angle GBE=90°$. $\because GE=GE$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EFG \cong \mathrm{Rt}\triangle EBG$ (HL)，$\therefore GF=GB$. 设 $GB=GF=x$，则 $AG=2-x$，$DG=2+x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGD$ 中，根据勾股定理可得 $AG^2+AD^2=DG^2$，即 $(2-x)^2+2^2=(2+x)^2$，解得 $x=\frac{1}{2}$，$\therefore DG=\frac{5}{2}$，$AG=\frac{3}{2}$. $\because \angle ADG$ 和 $\angle DAG$ 的平分线 DH，AH 相交于点 H，$\therefore$ 点 H 到 AD，AG，GD 的距离相等，$\therefore S_{\triangle GDH}=\frac{GD}{GD+AG+AD}\cdot S_{\triangle ADG}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2=\frac{5}{8}$，故选 A.

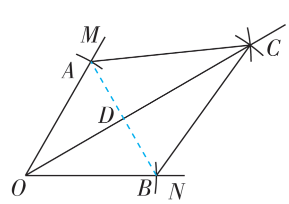


6. A 【解析】如图所示，连接 BD，将 DA 绕点 D 逆时针旋转 90°得到 DM，将 DB 绕点 D 逆时针旋转 90°得到 DN，连接 MN，则易得点 F 在 MN 上运动. 当点 E 和点 A 重合时，$EC-ED$ 有最大值. $\because EC=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$ED=1$，$\therefore EC-ED$ 的最大值为 $5-1=4$，故 A 选项错误. 当点 F 和点 M 重合时，FB 有最小值，此时 $FB=\sqrt{(4-1)^2+1^2}=\sqrt{10}$，故 B 选项正确. 作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 $D'E$，CD'，则 $DE=D'E$，$\therefore$ 当 C，E，D' 三点共线时，$EC+ED$ 的值最小，即为 CD' 的长，$\therefore EC+ED$ 的最小值为 $\sqrt{(3+1)^2+4^2}=4\sqrt{2}$，故 C 选项正确. 当点 F 和点 M 或点 N 重合时，FC 有最大值，此时 $FC=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$，故 D 选项正确. 故选 A.



7. 24 【解析】由题可知 $DF=AC$，$AD=CF=2$，$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB+BF+DF+AD=AB+BC+CF+AC+AD=\triangle ABC$ 的周长$+AD+CF=20+2+2=24$. 故答案为 24.

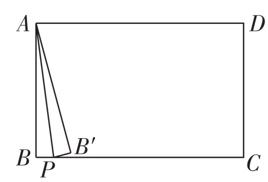
8. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】如图，连接 AB，交 OC 于点 D.



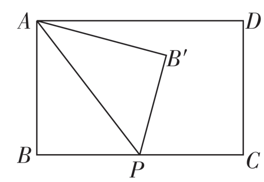
由题意得 $OA=OB=2$，$AC=BC=\sqrt{6}$，$\therefore OC$ 垂直平分 AB，$\therefore OC\perp AB$，$BD=\frac{1}{2}AB$. $\because \angle MON=60°$，$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，$\therefore AB=OA=2$，$\therefore BD=1$，$\therefore CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{5}$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\tan\angle BCO=\frac{BD}{CD}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故答案为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. 82.5°或 52.5°或 37.5° 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle B=\angle BAD=90°$. 由折叠得 $\angle PAB'=\angle PAB=\frac{1}{2}\angle BAB'$.

如图(1)，$\angle BAB'=15°$，$\therefore \angle PAB=\frac{1}{2}\times 15°=7.5°$，$\therefore \angle APB=90°-\angle PAB=82.5°$.



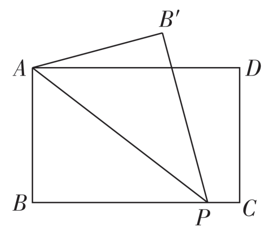
图(1)



图(2)

如图(2)，$\angle DAB'=15°$，且点 B' 与点 B 在直线 AD 同侧，$\because \angle BAB'=\angle BAD-\angle DAB'=75°$，$\therefore \angle PAB=\frac{1}{2}\times 75°=37.5°$，$\therefore \angle APB=90°-\angle PAB=52.5°$.

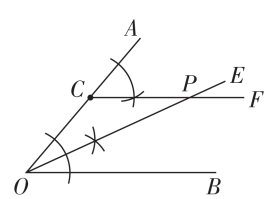
如图(3)，$\angle DAB'=15°$，且点 B' 与点 B 在直线 AD 异侧，$\because \angle BAB'=\angle BAD+\angle DAB'=105°$，$\therefore \angle PAB=\frac{1}{2}\times 105°=52.5°$，$\therefore \angle APB=90°-\angle PAB=37.5°$.



图(3)

综上所述，$\angle APB$ 的度数是 82.5°或 52.5°或 37.5°，故答案为 82.5°或 52.5°或 37.5°.

10.【解】



如图，点 P 即为所求.（作法不唯一）

11. (1)【证明】$\because \angle ACB=90°$，$\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle BAC=\angle ABC=45°$.

$\because$ 线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180°-2\times 45°=90°$得到线段 AE，点 D 与点 C 重合，

$\therefore AE=AD=AC$，$\angle EAB=90°-\angle BAC=45°$，

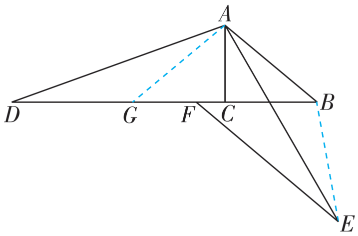
$\therefore \angle EAB=\angle ABC$，$\therefore BC/\!/AE$.

$\because EF/\!/AB$，$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形，

$\therefore BF=AE$，$\therefore BF=AC$.

(2)【解】$DF=2BC$. 证明：

如图，在 DB 上取一点 G，连接 AG，使得 $AG=AB$，连接 BE，



$\therefore \angle AGB=\angle ABG=\alpha$，$\therefore \angle BAG=180°-2\alpha$.

$\because$ 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180°-2\alpha$ 得到线段 AE，

$\therefore DA=EA$，$\angle DAE=\angle GAB=180°-2\alpha$，

$\therefore \angle DAG=\angle EAB$，

$\therefore \triangle DAG\cong\triangle EAB$ (SAS)，$\therefore DG=BE$，$\angle AGD=\angle ABE=180°-\angle AGC=180°-\alpha$.

又 $\because \angle ABC=\alpha$，

$\therefore \angle FBE=\angle ABE-\angle ABC=180°-\alpha-\alpha=180°-2\alpha$.

$\because EF/\!/AB$，$\therefore \angle BFE=\angle ABF=\alpha$，

$\therefore \angle BEF=180°-\angle FBE-\angle BFE=\alpha$，

$\therefore BE=BF$，$\therefore DG=BF$.

$\because AG=AB$，$AC\perp BC$，$\therefore GC=BC$，

$\therefore DF=BD-BF=BD-DG=BG=BC+CG=2BC$.

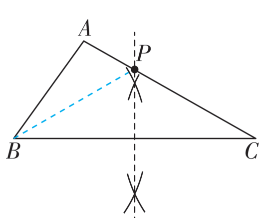
B 考点突破练

考点 31 尺规作图

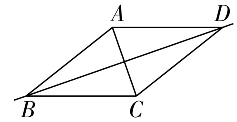
刷基础

1. D 【解析】题中第一个图为用尺规作角平分线的方法，OP 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第二个图，由作图可知，$OC=OD$，$OA=OB$，$\therefore AC=BD$. $\because \angle AOD=\angle BOC$，$\therefore \triangle AOD\cong\triangle BOC$，$\therefore \angle OAD=\angle OBC$. $\because AC=BD$，$\angle APC=\angle BPD$，$\therefore \triangle BPD\cong\triangle APC$，$\therefore AP=BP$. 又 $\because OA=OB$，$OP=OP$，$\therefore \triangle AOP\cong\triangle BOP$，$\therefore \angle AOP=\angle BOP$，$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第三个图，由作图可知 $\angle ACP=\angle AOB$，$OC=CP$，$\therefore CP/\!/BO$，$\angle COP=\angle CPO$，$\therefore \angle CPO=\angle BOP$，$\therefore \angle COP=\angle BOP$，$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第四个图，由作图可知 $OP\perp CD$，$OC=OD$，$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线. 故选 D.

2.【解】如图，点 P 即为所求.（作图方法不唯一）

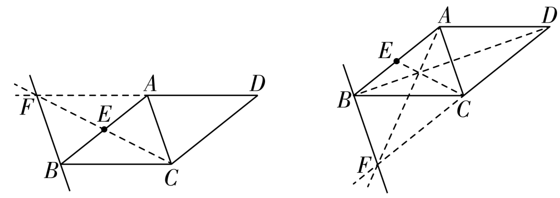


3.【解】(1) 如图(1)，直线 BD 即为所求.



图(1)

(2) 如图(2)，直线 BF 即为所求.

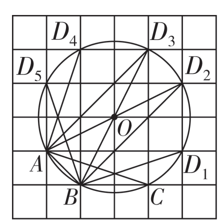


（方法 1）（方法 2）

图(2)

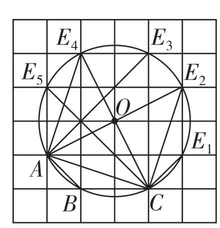
4. D 【解析】由作法得 BO 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，$\therefore$ A 选项不符合题意. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB=CD=3$，$BC=AD$，$AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$，$\therefore \angle CBE=\angle AEB$，$\therefore \angle ABE=\angle AEB$，$\therefore AE=AB=3$，$\therefore AD=AE+DE=3+2=5$，$\therefore BC=5$，$\therefore$ B 选项不符合题意. $\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle F=\angle ABE$. $\because \angle AEB=\angle DEF$，$\therefore \angle DEF=\angle F$，$\therefore DE=DF=2$，$\therefore$ C 选项不符合题意. $\because DE/\!/BC$，$\therefore \frac{BE}{EF}=\frac{CD}{DF}=\frac{3}{2}$，$\therefore$ D 选项符合题意. 故选 D.

5.【解】(1) 如图(1)，$\angle AD_1B$ 即为所求（答案不唯一，用其余的格点 D_2，D_3，D_4，D_5 画出的 $\angle ADB$ 均符合题意）.



图(1)

(2) 如图(2)，$\angle AE_1C$ 即为所求（答案不唯一，用其余的格点 E_2，E_3，E_4，E_5 画出的 $\angle AEC$ 均符合题意）.



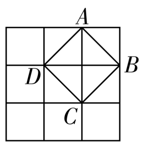
图(2)

刷提升

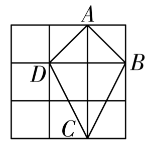
1. A 【解析】①根据作图的过程可知，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，故①正确. ② $\because \angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\therefore \angle CAB=60°$. $\because \angle CAD=\angle BAD$，$\therefore \angle CAD=\angle BAD=30°$，$\therefore \angle ADC=90°-$

$\angle CAD=60°$，故②正确. ③$\because\ \angle DAB=\angle B=30°$，$\therefore AD=BD$，$\therefore$ 点 D 在 AB 的垂直平分线上，故③正确. ④$\because\ \angle CAD=30°$，$\therefore AD=2CD$. $\because BD=DA$，$\therefore DB=2CD$，故④正确. 综上所述，正确的结论是①②③④，共 4 个. 故选 A.

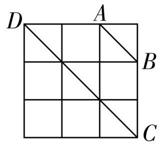
2.【解】(1) 如图(1)，四边形 $ABCD$ 即为所求.（答案不唯一）



图(1)



图(2)

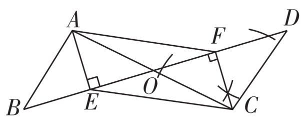


图(3)

(2) 如图(2)，四边形 $ABCD$ 即为所求.（答案不唯一）

(3) 如图(3)，四边形 $ABCD$ 即为所求.（答案不唯一）

3.【解】(1) 如图，CF，AF，CE 即为所作.



(2) 四边形 $AECF$ 为平行四边形. 理由如下：

$\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle B=\angle D$.

$\because AE\perp BD$，$CF\perp BD$，$\therefore AE/\!/CF$，$\angle AEB=\angle CFD=90°$.

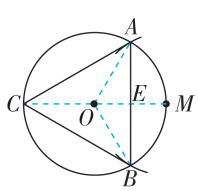
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD,\\ \angle B=\angle D,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS)，$\therefore AE=CF$.

又$\because AE/\!/CF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

刷 素养

4.【解】(1) 如图，点 A，B，C 即为所求.



(2) 如图，设 CM 交 AB 于点 E，连接 OA，OB. $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\therefore AB=CB=AC$，$\angle AOB=120°$. $\because \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，$\therefore \angle AOM=\angle BOM=60°$. $\because OA=OB$，$\therefore OE\perp AB$，$AE=EB=AO\cdot\sin 60°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$(cm)，$\therefore AB=2\sqrt{3}$ cm，$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}$ cm.

故答案为 $6\sqrt{3}$.

考点 32　视图与投影

刷 基础

1. A　【解析】从正面看，可得选项 A 的图形，故选 A.

2. D　【解析】由题意可知，$\angle A_1B_1C_1$ 不变，影子是直角三角形，影子越来越大. 故选 D.

3. C　【解析】

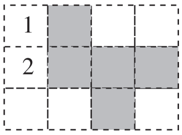
选项	主视图	俯视图	判断
A	矩形	圆	不合题意
B	矩形（中间有一条竖的虚线）	三角形	不合题意
C	圆	圆	符合题意
D	三角形	带对角线的矩形	不合题意

故选 C.

4. C　【解析】选项 C 中的几何体符合题意，故选 C.

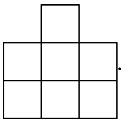
5. A　【解析】由题意得展开图是四棱锥的展开图，$\therefore$ A、B、C 处依次写上的字可以是吉、如、意或如、吉、意. 故选 A.

6. B　【解析】如图所示，选择标有 1 或 2 的位置的空白小正方形，能与阴影部分组成正方体的展开图，所以能与阴影部分组成正方体的展开图的方法有 2 种. 故选 B.



刷 提升

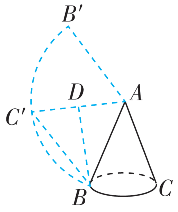
1. A　【解析】这个几何体的主视图与左视图相同，俯视图与主视图和左视图均不相同. 故选 A.

2. D　【解析】观察图形可知，该几何体的主视图有 3 列，从左到右正方形的个数分别为 2，3，2，即  . 故选 D.

3. D　【解析】由平行投影可知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是位似图形，$\because OB:BB_1=3:4$，$\therefore OB:OB_1=3:7$，$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 $3:7$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}=\left(\dfrac{3}{7}\right)^2=\dfrac{9}{49}$，$\therefore \triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $90\times\dfrac{49}{9}=490$($\text{cm}^2$)，故选 D.

4. A　【解析】由主视图和俯视图可知从左侧看到的图形下面是一个长方形，上面中间是一个小正方形，故选 A.

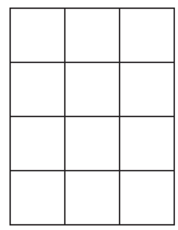
5. C　【解析】如图，将圆锥侧面展开得到扇形 ABB'，C' 为 $\overset{\frown}{BB'}$ 的中点，连接 AC'，BC'，D 为 AC' 的中点，连接 BD. 设 $\angle BAB'=n°$. $\because \dfrac{n\pi\times 6}{180}=4\pi$，$\therefore n=120$，即 $\angle BAB'=120°$. $\because C'$ 为 $\overset{\frown}{BB'}$ 的中点，$\therefore \angle BAC'=60°$，$\therefore \triangle BAC'$ 是等边三角形. $\because D$ 是 AC' 的中点，$\therefore \angle ADB=90°$，$\therefore BD=AB\cdot\sin\angle BAD=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，$\therefore$ 这只蚂蚁爬行的最短路程是 $3\sqrt{3}$. 故选 C.



第一部分　考点过关
第二部分　题型突破
第三部分　中考新趋势
狂K重点

刷 素养

6. 14　32　【解析】题图(1)中,"直线"形图案的周长是10,"Z"形图案的周长是10,"田"形图案的周长是8,"L"形图案的周长是10,"T"形图案的周长是10. 重合的边越多,拼成图形的周长越小,一个"直线"形和两个"田"形拼成的图形如图所示(也可由其他图形拼成),周长最小,为$(3+4)\times2=14$. 同理,重合面越多,所拼成立体图形的表面积越小,两个"L"形和一个"田"形一共12个方块,所拼成的立体图形为$2\times2\times3$的长方体,表面积为$2\times4+6\times4=32$,故答案为14,32.



考点33　图形的对称、平移、旋转

刷 基础

1. B　【解析】在四个选项的图案中,只有选项B的图案能找到一条直线,使图案沿这条直线对折后直线两旁的部分能完全重合,故选项B是轴对称图形,选项A、C、D不是轴对称图形. 故选B.

2. B　【解析】

A	该图形不是中心对称图形	不符合题意
B	该图形是中心对称图形	符合题意
C	该图形不是中心对称图形	不符合题意
D	该图形不是中心对称图形	不符合题意

3. B　【解析】$\because EC=2BE=4$,$\therefore BE=2$,$\therefore BC=BE+EC=2+4=6$. 由平移的性质可得,$AC\parallel DF$,$AC=DF$,$EF=BC=6$,$\therefore \triangle ECG\backsim\triangle EFD$,$\therefore \frac{EC}{EF}=\frac{CG}{DF}$,$\therefore \frac{4}{6}=\frac{CG}{DF}$. $\because AG=1.5$,$\therefore AC=DF=1.5+CG$,$\therefore \frac{4}{6}=\frac{CG}{1.5+CG}$,$\therefore CG=3$. 故选B.

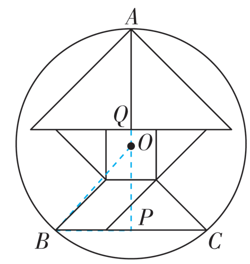
4. B　【解析】$\because$ 将$\triangle ABC$绕点C逆时针旋转得到$\triangle DEC$,$\therefore \angle EDC=\angle BAC=135^\circ$,$CD=CA$,$\therefore \angle CDA=45^\circ$,$\therefore \angle CAD=\angle CDA=45^\circ$,$\therefore \angle DCA=90^\circ$,即$AC\perp CD$,故选项B一定正确. 由已知条件无法得出选项A、C、D一定正确,故选B.

> **关键点拨**
>
> **旋转的性质**
>
> 图形旋转前后对应角相等,对应边相等.

5. 1　【解析】根据折叠可得$DC=DE$,$\angle AED=\angle C=90^\circ$,$\therefore \angle BED=90^\circ$. $\because \angle B=30^\circ$,$\therefore BD=2ED=2CD$. $\because BC=3$,$\therefore BD+CD=3CD=3$,$\therefore DE=CD=1$,故答案为1.

6. (1)6　(2)$\frac{73}{16}$　【解析】(1)$\because$ 正方形纸板的边长为$4\sqrt{2}$,$\therefore$ 大等腰直角三角形的直角边长为4,中等腰直角三角形的直角边长为$2\sqrt{2}$,小等腰直角三角形的直角边长为2,小正方形的边长为2,平行四边形的边长为2和$2\sqrt{2}$. $\because BC$是平行四边形的短边长和中等腰直角三角形的斜边长之和,$\therefore BC=2+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$,故答案为6.

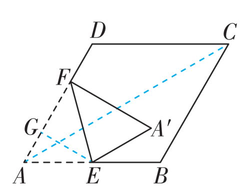
(2)如图,延长AQ交BC于P,设圆心为O,连接OB.



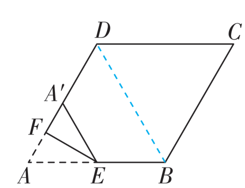
$\because$ 小鱼图案外轮廓是轴对称图形,$\therefore AP$垂直平分BC,$\therefore$ 圆心O在AP上,$BP=CP=\frac{1}{2}BC=3$. 由题意可得$AP=4+2+2=8$. 设半径$OA=OB=r$,则$OP=AP-OA=8-r$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BOP$中,$OP^2+BP^2=OB^2$,$\therefore (8-r)^2+3^2=r^2$,解得$r=\frac{73}{16}$,故答案为$\frac{73}{16}$.

刷 易错

7. $3-\sqrt{3}$或3　【解析】①若$A'E\parallel AC$,如图(1),连接AC. 在菱形$ABCD$中,AC平分$\angle BAD$,$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$. $\because A'E\parallel AC$,$\therefore \angle A'EB=\angle BAC=30^\circ$. 由折叠得,$\angle AEF=\angle A'EF$,$\therefore \angle AEF=75^\circ$,$\therefore \angle AFE=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$. $\because$ 点E是AB的中点,$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=2$. 过点$E$作$EG\perp AF$,垂足为$G$,$\therefore AG=\frac{1}{2}AE=1$,$GE=\sqrt{3}AG=\sqrt{3}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle EFG$中,$\angle AFE=45^\circ$,$\therefore GF=GE=\sqrt{3}$,$\therefore AF=1+\sqrt{3}$,$\therefore DF=AD-AF=4-(1+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$.



图(1)



图(2)

②若$A'E\parallel BD$,如图(2),连接BD. 在菱形$ABCD$中,$AB=AD$,$\angle A=60^\circ$,$\therefore \triangle ABD$是等边三角形,$\therefore \angle ABD=60^\circ$. $\because A'E\parallel BD$,$\therefore \angle AEA'=60^\circ$. 又$\because AE=A'E$,$\therefore \triangle AEA'$是等边三角形,

$\therefore$ 点 A' 落在 AD 上，$\therefore AA'=AE=2$，$\therefore AF=1$，$\therefore DF=3$. 综上，DF 的长为 $3-\sqrt{3}$ 或 3. 故答案为 $3-\sqrt{3}$ 或 3.

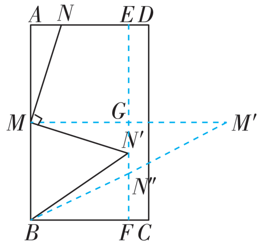
易错警示

注意画出不同情况示意图避免漏解.

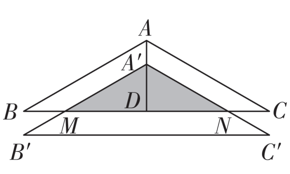
刷 提升

1. B 【解析】A 选项，该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意；B 选项，该图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；C 选项，该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；D 选项，该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意. 故选 B.

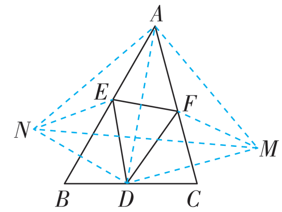
2. B 【解析】如图，过点 N' 作 $EF//AB$，分别交 AD,BC 于 E,F，过点 M 作 $MG\perp EF$ 于点 G. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\therefore AB//EF//CD$，$\therefore$ 易知四边形 $AMGE$ 和 $BMGF$ 都是矩形，$\therefore \angle A=\angle MGN'=90°$. 由旋转的性质得 $\angle NMN'=90°$，$MN=MN'$，$\therefore \angle AMN=90°-\angle NMG=\angle GMN'$，$\therefore \triangle AMN\cong\triangle GMN'$（AAS），$\therefore MG=AM$，$\therefore$ 点 N' 在 EF 上运动. 作点 M 关于直线 EF 的对称点 M'，连接 $M'B$ 交直线 EF 于点 N''，则 $BM+BN'+MN'\geqslant BM+BM'$，$\therefore$ 当 N' 与 N'' 重合时，$\triangle MBN'$ 的周长取得最小值，最小值为 $BM+BM'$. $\because BM=AM=\frac{1}{2}AB=5$，$\therefore MM'=2MG=2AM=10$，$\therefore BM+BM'=5+\sqrt{5^2+10^2}=5+5\sqrt{5}$，故选 B.



3. $4+2\sqrt{3}$ 【解析】如图. $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，且 AD 是底边的中线，$\therefore AD\perp BC$. 又 $\because AB=AC=3$，$\angle BAC=120°$，$\therefore \angle B=\angle C=30°$，$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$. $\because AA'=\frac{1}{3}AD$，$\therefore AA'=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore A'D=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$. 由平移可知，$A'M//AB$，$\therefore \angle A'MD=\angle B=30°$，$\therefore A'M=2A'D=2$，$MD=\sqrt{3}A'D=\sqrt{3}$. 同理可得，$A'N=2$，$DN=\sqrt{3}$，$\therefore \triangle A'MN$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$. 故答案为 $4+2\sqrt{3}$.



4. $2\sqrt{3}$ 【解析】如图，作点 D 关于 AB,AC 的对称点 N,M，连接 AM,AN,EN,FM,MN,AD，则 $EN=ED$，$FD=FM$，$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $DE+EF+FD=NE+EF+FM\geqslant MN$，$\therefore$ 当 N,E,F,M 四点共线时，$\triangle DEF$ 的周长取得最小值. $\because N,M$ 分别是 D 关于 AB，AC 的对称点，$\therefore \angle NAE=\angle EAD$，$\angle FAD=\angle FAM$，$AN=AD=AM$. 又 $\because \angle EAD+\angle FAD=45°$，$\therefore \angle NAM=\angle NAE+\angle EAD+\angle FAD+\angle FAM=90°$，$\therefore \triangle AMN$ 是等腰直角三角形，$\therefore MN=\sqrt{2}AN=\sqrt{2}AD$，$\therefore$ 当 $AD\perp BC$ 时，AD 取得最小值，即 $\triangle DEF$ 周长最小. 又 $\because \angle B=60°$，$AB=2\sqrt{2}$，$\therefore AD_{\min}=AB\sin 60°=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$，$\therefore \triangle DEF$ 的周长最小为 $\sqrt{2}AD=\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$，故答案为 $2\sqrt{3}$.



刷 素养

5. (1)【证明】由折叠性质可得 $\angle AGD=\angle AGH$，$\angle ADG=\angle AMG=90°$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\therefore \angle AGD=\angle HAG$，

$\therefore \angle AGH=\angle HAG$，$\therefore HA=HG$.

由题意可知，$AB//EF//DC$，$AE=DE$，

$\therefore \frac{GM}{HM}=\frac{DE}{AE}=1$，$\therefore GM=HM$.

在 $\triangle AMH$ 和 $\triangle AMG$ 中，$\begin{cases}AM=AM,\\ \angle AMH=\angle AMG=90°,\\ HM=GM,\end{cases}$

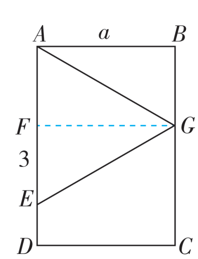
$\therefore \triangle AMH\cong\triangle AMG$（SAS），$\therefore AH=AG$.

又 $\because HA=HG$，$\therefore AH=AG=HG$，$\therefore \triangle AGH$ 是等边三角形.

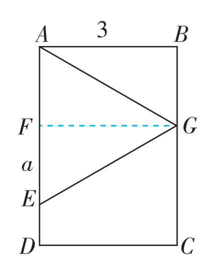
【解】(2)①如图(1)，$\triangle AGE$ 为等边三角形，其一边位于边长为 3 的边上时，过 G 作 $GF\perp AE$.

当 $GF=a$ 时，$AE=2AF=2\times\tan 30°\times FG=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3}a\leqslant 3$.

又 $\because a>0$，$\therefore 0<a\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



图(1)

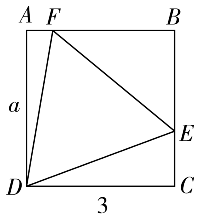


图(2)

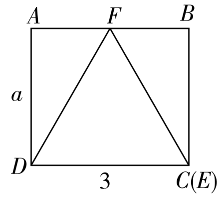
②如图(2)，$\triangle AGE$ 为等边三角形，其一边位于边长为 a 的边上时，过 G 作 $GF\perp AE$.

当 $FG=3$ 时，$AE=2AF=2\sqrt{3}$，$\therefore a\geqslant 2\sqrt{3}$.

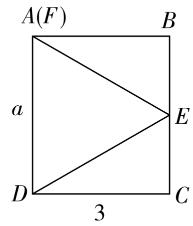
③如图(3)，$\triangle DEF$ 为等边三角形，各边位于矩形的内部.



图(3)



图(4)



图(5)

当 DE 与 CD 重合时,如图(4),$DE=DC=3$,

此时等边三角形的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,即 AD 的值最小,$\therefore a>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

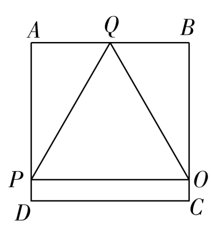
当 DF 与 AD 重合时,如图(5),$DF=AD=a$,

此时 $DE=2\sqrt{3}$,AD 的值最大,$\therefore a<2\sqrt{3}$,$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}<a<2\sqrt{3}$.

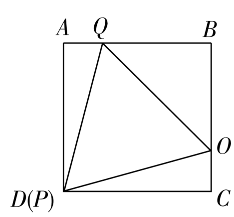
(3)$4\sqrt{3}\leqslant S\leqslant 32\sqrt{3}-48$.

当 P,O 分别在正方形的两对边上,且 $OP//CD$ 时,如图(6),

此时 S 最小,易知 $S_{\min}=\frac{1}{2}\times OP\times 2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



图(6)



图(7)

当 P 与 D 重合,O,Q 分别在正方形两邻边上时,如图(7),

此时 S 最大.

易证 $Rt\triangle ADQ\cong Rt\triangle CDO$(HL),$\therefore AQ=CO$.

设 $AQ=CO=x$,则 $BQ=BO=4-x$.

由勾股定理可得 $DQ^2=4^2+x^2$,$OQ^2=2(4-x)^2$.

$\because DQ=QO$,$\therefore 4^2+x^2=2(4-x)^2$,解得 $x=8-4\sqrt{3}$(不合题意的已舍去),

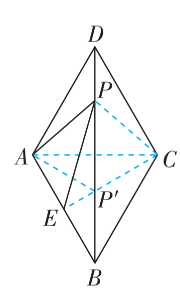
$\therefore OQ=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$,$\therefore S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{4}OQ^2=32\sqrt{3}-48$.

综上,$4\sqrt{3}\leqslant S\leqslant 32\sqrt{3}-48$.

专题 18　利用轴对称求最值

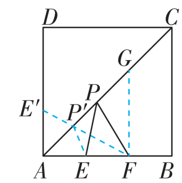
刷 难关

1. C　【解析】如图,连接 AC,PC,EC,EC 交 BD 于点 P',连接 $P'A$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore A,C$ 关于 BD 对称,$\therefore$ 当点 P 与点 P'重合时,$PA+PE$ 的值最小,最小值为 EC 的长. $\because CA$ 平分 $\angle DCB$,$\therefore \angle ACD=\angle ACB=\frac{1}{2}\angle DCB=60°$. $\because CB=AB=CD=4$,$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore AC=BC=4$. $\because E$ 是 AB 的中点,



$\therefore EC\perp AB$,$AE=EB=2$,$\therefore EC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,$\therefore PA+PE$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$. 故选 C.

2. $\frac{2}{7}$　【解析】如图,作点 E 关于直线 AC 的对称点 E',连接 FE'交 AC 于点 P',连接 $P'E$,$\therefore P'E'=P'E$,$\therefore PE+PF\geqslant E'F$,故当 $PE+PF$ 取得最小值时,点 P 位于点 P'处,$\therefore$ 当 $PE+PF$ 取得最小值时,只要求出$\frac{AP'}{P'C}$的值即可. $\because$ 正方形 $ABCD$ 是轴对称图形,$\therefore$ 点 E 关于 AC 所在直线对称的对称点 E'在 AD 上,且 $AE'=AE$. 过点 F 作 $FG\perp AB$ 交 AC 于点 G,则$\angle GFA=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore \angle DAB=\angle B=90°$,$\angle CAB=\angle ACB=45°$,$\therefore FG//BC//AD$,$\therefore \angle AGF=\angle ACB=45°$,$\therefore GF=AF$. $\because E,F$ 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的三等分点,$\therefore AE'=AE=EF=FB$,$\therefore$ 易得 $GC=\frac{1}{3}AC$,$\frac{AE'}{GF}=\frac{AE}{AF}=\frac{1}{2}$,$\therefore AG=\frac{2}{3}AC$. $\because AE'//FG$,$\therefore \triangle AE'P'\backsim\triangle GFP'$,$\therefore \frac{AP'}{P'G}=\frac{AE'}{GF}=\frac{1}{2}$,$\therefore AP'=\frac{1}{3}AG=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}AC=\frac{2}{9}AC$,$\therefore P'C=AC-AP'=AC-\frac{2}{9}AC=\frac{7}{9}AC$,$\therefore \frac{AP'}{P'C}=\frac{\frac{2}{9}AC}{\frac{7}{9}AC}=\frac{2}{7}$,故答案为 $\frac{2}{7}$.

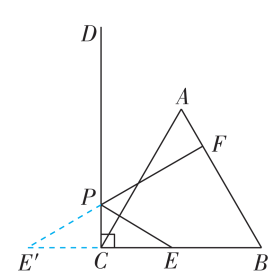


方法技巧

解决将军饮马问题的方法

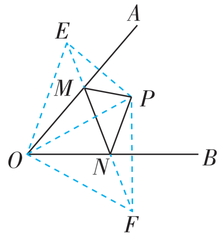
利用轴对称的性质,作出其中一个定点关于直线的对称点,连接对称点和另一个定点,找到取得最值时动点的位置,然后计算求值.

3. C　【解析】作点 E 关于射线 CD 的对称点 E',过 E'作 $E'F\perp AB$ 于 F,交射线 CD 于 P,如图,则 $E'P=EP$,$\therefore EP+FP=E'P+FP=E'F$,此时 $EP+FP$ 的值最小. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore \angle B=60°$. $\because E'F\perp AB$,$BF=5$,$\therefore E'F=\sqrt{3}BF=5\sqrt{3}$,即 $PE+PF$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$. 故选 C.

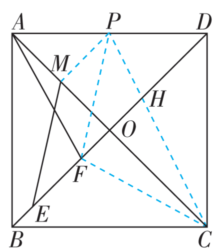


4. 80°　【解析】如图,连接 OP,作点 P 关于 OA 的对称点 E,连接 EO,作点 P 关于 OB 的对称点 F,连接 OF,连接 EF 交 OA 于点 M,交 OB 于点 N,此时$\triangle PMN$ 周长最小. 由轴对称的性质得,$\angle EOM=\angle MOP$,$\angle PON=\angle NOF$,$\angle OEM=\angle OPM$,

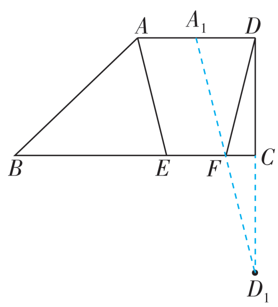
$\angle OPN=\angle OFN$, $OE=OP=OF$. $\because$ $\angle EOF=\angle EOM+\angle MOP+\angle PON+\angle NOF$, $\angle AOB=\angle MOP+\angle PON$, $\therefore$ $\angle EOF=2\angle AOB$. 又$\because$ $\angle AOB=50°$, $\therefore$ $\angle EOF=100°$. 在$\triangle EOF$中, $\angle OEM+\angle OFN+\angle EOF=180°$, $\therefore$ $\angle OEM+\angle OFN=180°-100°=80°$. $\because$ $\angle MPO=\angle OEM$, $\angle OPN=\angle OFN$, $\therefore$ $\angle MPN=\angle MPO+\angle OPN=80°$, 故答案为$80°$.



5. $\sqrt{10}$ 【解析】在正方形$ABCD$中, $AB=2\sqrt{2}$, $\therefore$ $BD=4$, $\therefore$ $OD=2$. 如图, 取AD的中点P, 连接CF, FP, MP, CP, CP交BD于点H. $\because$ M为AO的中点, $\therefore$ $MP// OD$, $MP=\frac{1}{2}OD=1$. $\because$ $EF=1$, $\therefore$ $EF=MP$, $\therefore$ 四边形$MEFP$为平行四边形, $\therefore$ $ME=PF$. $\because$ 四边形$ABCD$是正方形, $\therefore$ A, C关于BD对称, $\therefore$ $AF=CF$, $\therefore$ $AF+ME=CF+FP\geqslant CP$, 即F与H重合时, $AF+ME$的值最小, 最小值为PC的长. $\because$ $PD=\frac{1}{2}AD=\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{2}$, $\therefore$ $PC=\sqrt{PD^2+CD^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$, $\therefore$ $AF+ME$的最小值为$\sqrt{10}$. 故答案为$\sqrt{10}$.



6. $2\sqrt{17}+6$ 【解析】如图, 取AD的中点A_1, 则$A_1A=A_1D=\frac{1}{2}AD=2=EF$. 作$D$关于直线$BC$的对称点$D_1$, 连接$A_1D_1$交$BC$于点$F$, 在点$F$左侧截取$EF=AA_1$, $\therefore$ $DF=FD_1$. 由题意可知$AD// BC$, $\therefore$ 四边形$AEFA_1$为平行四边形, $\therefore$ $AE=A_1F$, $\therefore$ 四边形$AEFD$的周长为$AE+EF+DF+AD=A_1F+2+DF+4=6+A_1F+D_1F=6+A_1D_1$. 由两点之间线段最短可知, 此时四边形$AEFD$周长最小. 在$\triangle A_1DD_1$中, $\angle ADC=90°$, $\therefore$ $A_1D_1=\sqrt{A_1D^2+DD_1^2}=\sqrt{2^2+(4+4)^2}=2\sqrt{17}$, $\therefore$ 四边形$AEFD$周长的最小值为$2\sqrt{17}+6$, 故答案为$2\sqrt{17}+6$.



专题19 图形折叠问题

刷难关

1.【解】(1)四边形$BDB'E$为菱形.

理由如下:

由折叠的性质可得$BD=B'D$, $\angle B'DE=\angle BDE$, $BE=B'E$.

$\because$ $BC// B'D$, $\therefore$ $\angle B'DE=\angle DEB=\angle BDE$,

$\therefore$ $BD=BE$, $\therefore$ $BE=BD=B'E=B'D$,

$\therefore$ 四边形$BEB'D$为菱形.

(2)①$DE\perp A'E$.

理由: 由(1)可得$BD=B'D=B'E=BE$.

由折叠的性质可得$AD=A'D$.

$\because$ $AD=2BD$, $\therefore$ $A'D=2BD=2B'D$, $\therefore$ $DB'=A'B'=B'E$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. $\because$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$,

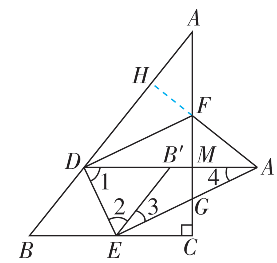
$\therefore$ $\angle 2+\angle 3=90°$, $\therefore$ $\angle DEA'=90°$, $\therefore$ $DE\perp A'E$.

②5或$\frac{165}{37}$.

$\because$ $\angle C=90°$, $AB=15$, $BC=9$, $\therefore$ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=12$.

延长$A'F$交AB于点H, 设AC, $A'D$交点为M.

当$A'F=FG$时, 如图(1).



图(1)

$\because$ $\angle C=90°$, $A'D// BC$, $\therefore$ $\angle AMD=\angle C=90°$, $\therefore$ $\angle AMA'=90°$.

由折叠的性质得$AF=A'F$, $\angle A=\angle DA'F$.

$\because$ $\angle AFH=\angle A'FG$, $\therefore$ $\angle AHF=\angle AMA'=90°=\angle C$.

$\because$ $\angle A=\angle A$, $\therefore$ $\triangle AFH\backsim\triangle ABC$, $\therefore$ $\frac{AF}{AB}=\frac{HF}{BC}=\frac{AH}{AC}$,

$\therefore$ $HF:AH:AF=BC:AC:AB=3:4:5$.

$\because$ $\angle A=\angle DA'F$, $\angle AHF=\angle A'MF$, $AF=A'F$,

$\therefore$ $\triangle AHF\cong\triangle A'MF$(AAS), $\therefore$ $HF=FM$, $AH=A'M$.

设$HF=FM=3x$, $AH=A'M=4x$, $AF=A'F=5x$, $\therefore$ $AM=AF+FM=8x$.

$\because$ $A'D// BC$, $\therefore$ $\triangle AMD\backsim\triangle ACB$, $\therefore$ $\frac{AM}{AC}=\frac{AD}{AB}$, 即$\frac{8x}{12}=\frac{AD}{15}$, $\therefore$ $AD=10x$, $\therefore$ $BE=BD=AB-AD=15-10x$, $\therefore$ $CE=BC-BE=9-(15-10x)=10x-6$.

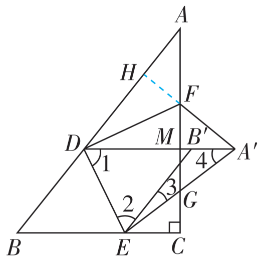
$\because$ $FG=A'F=5x$, $\therefore$ $MG=FG-FM=2x$, $\therefore$ $CG=AC-AM-MG=12-8x-2x=12-10x$.

$\because$ $A'D// BC$, $\therefore$ $\triangle A'MG\backsim\triangle ECG$, $\therefore$ $\frac{A'M}{CE}=\frac{MG}{CG}$, $\therefore$ $\frac{4x}{10x-6}=\frac{2x}{12-10x}$, 解得$x=1$或$x=0$(舍去), $\therefore$ $A'F=5x=5$.

当$A'F=A'G$时, 如图(2), 同上可得$HF:AH:AF=BC:AC:AB=3:4:5$, $HF=FM$, $AH=A'M$, $AF=A'F$.

设$HF=FM=3y$, $AH=A'M=4y$, $AF=A'F=5y$,

$\therefore$ $AM=AF+FM=8y$.



图(2)

$\because A'D /\!/ BC$，$\therefore \triangle AMD \backsim \triangle ACB$，$\therefore \dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$，即$\dfrac{8y}{12}=\dfrac{AD}{15}$，

$\therefore AD=10y$，$\therefore BE=BD=AB-AD=15-10y$，

$\therefore CE=BC-BE=10y-6$.

$\because A'F=A'G$，$A'M\perp AC$，$\therefore GM=FM=3y$，

$\therefore CG=AC-AF-FM-GM=12-11y$.

$\because A'D /\!/ BC$，$\therefore \triangle A'MG \backsim \triangle ECG$，$\therefore \dfrac{A'M}{CE}=\dfrac{MG}{CG}$，

$\therefore \dfrac{4y}{10y-6}=\dfrac{3y}{12-11y}$，解得 $y=\dfrac{33}{37}$或 $y=0$(舍去)，

$\therefore A'F=5y=\dfrac{165}{37}$. $\therefore A'F$ 的长为 5 或$\dfrac{165}{37}$.

2. (1)【解】由折叠知$\angle D=\angle A=\angle 60°$，$\therefore$ 若$\triangle DBC$ 为直角三角形，则 $\angle ABC=90°$ 或 $\angle ACB=90°$. 当 $\angle ABC=90°$ 时，

$\because \angle BAC=60°$，$\therefore \angle ACB=30°$，$\therefore AB=\dfrac{1}{2}AC$.

又$\because AB+AC=12$，$\therefore \dfrac{1}{2}AC+AC=12$，$\therefore AC=8$，即 x 的值为 8.

当$\angle ACB=90°$时，$\because \angle BAC=60°$，$\therefore \angle ABC=30°$，$\therefore AB=2AC$.

又$\because AB+AC=12$，$\therefore 2AC+AC=12$，$\therefore AC=4$，即 x 的值为 4.

综上，当 x 的值为 4 或 8 时，$\triangle DBC$ 为直角三角形. 故答案为 4 或 8.

(2)【解】①如图(1)，点 O 即为$\triangle BCD$ 的外心.

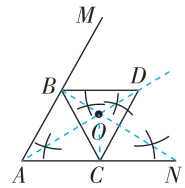
②$\because x=6$，$\therefore AB=AC=6$. $\because \angle BAC=60°$，$\therefore \triangle ABC$ 和$\triangle BCD$ 是等边三角形. 如图(1). $\because$ 点 O 是$\triangle BCD$ 的外心，$\therefore BO$，CO 分别是 $\angle DBC$ 和 $\angle DCB$ 的平分线，$OB=OC$，$\therefore \angle OBC=\angle OCB=30°$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60°$，$\therefore \angle ABO=\angle ACO=90°$.

又$\because OB=OC$，$\therefore AO$ 平分$\angle BAC$，$\therefore \angle BAO=\angle CAO=30°$，

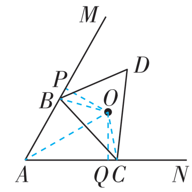
$\therefore BO=CO=\dfrac{1}{2}AO$，$\therefore \cos\angle BAO=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\because AB=6$，$\therefore AO=4\sqrt{3}$.

在 Rt $\triangle ABO$ 中，由勾股定理得 $BO=\sqrt{AO^2-AB^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-6^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BO=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，同理可得 $S_{\triangle ACO}=6\sqrt{3}$，$\therefore S_{\text{四边形}ABOC}=2S_{\triangle ABO}=2\times 6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.



图(1)



图(2)

(3)【证明】如图(2)，连接 AO，BO，CO，过点 O 作 $OP\perp AM$，$OQ\perp AN$. $\because$ 点 O 是$\triangle BCD$ 的外心，$\therefore OB=OC$，

$\therefore$ 易得$\angle BOC=2\angle BDC=120°$.

在四边形 $ABOC$ 中，$\angle BAC+\angle ABO+\angle BOC+\angle ACO=360°$.

$\because \angle BAC=60°$，$\angle BOC=120°$，$\therefore \angle ABO+\angle ACO=180°$.

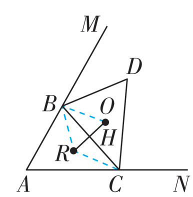
又$\because \angle ABO+\angle MBO=180°$，$\therefore \angle ACO=\angle MBO$.

在$\triangle OPB$ 和$\triangle OQC$ 中，$\begin{cases}\angle OPB=\angle OQC=90°,\\ \angle PBO=\angle QCO,\\ OB=OC,\end{cases}$

$\therefore \triangle OPB\cong\triangle OQC$，$\therefore OP=OQ$，$\therefore AO$ 是$\angle MAN$ 的平分线.

$\therefore$ 无论如何改变 x 的值，$\triangle BCD$ 的外心 O 始终在$\angle MAN$ 的平分线上.

(4)【解】OR 的最小值为 $2\sqrt{3}$. 如图(3)，连接 BR，OB，CR，设 OR 与 BC 的交点为 H. 根据折叠的性质可知，点 O 与点 R 关于 BC 对称，$\therefore OR\perp BC$，$RH=OH$，$\therefore RO=2RH$. $\because \angle BAC=60°$，$\therefore$ 易得$\angle BRC=$



图(3)

$120°$，$\therefore \angle BRH=60°$，$\angle RBC=30°$，$\therefore RH=\dfrac{1}{2}BR$，$\therefore RO=BR$，

$\therefore$ 当 BR 最小时，RO 最小. $\because$ 两点之间线段最短，$\therefore$ 当点 A，R，H 三点共线且垂直于 BC 时，BR 最小. 由折叠的性质可知，当$\triangle ABC$ 是等边三角形时，BR 最小，此时 $BC=AB=AC=6$，

$BH=\dfrac{1}{2}BC=3$. 设 $RH=y$，则 $BR=2y$. 在 Rt$\triangle BRH$ 中，由勾股定理得 $BH^2+HR^2=BR^2$，$\therefore 3^2+y^2=(2y)^2$，解得 $y=\sqrt{3}$(负值已舍去)，$\therefore RH=\sqrt{3}$，$\therefore RO=2RH=2\sqrt{3}$，$\therefore OR$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

3.【解】(1)①$PM=CM$.

理由：由折叠的性质得 $AD=DP$，$\angle DAB=\angle DPB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$\angle DAB=\angle BCD$，

$\therefore DP=BC$，$\angle DPB=\angle BCD$.

又$\because \angle DMP=\angle BMC$，

$\therefore \triangle DPM\cong\triangle BCM$，$\therefore PM=CM$.

②由(1)得$\triangle DPM\cong\triangle BCM$，$\therefore DM=BM$.

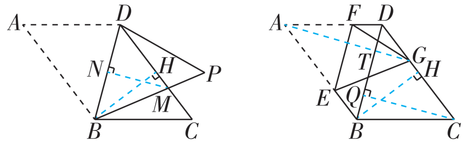
如图(1)，过点 M 作 $MN\perp BD$ 于点 N，过点 B 作 $BH\perp CD$ 于点 H，$\therefore DN=BN=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{5}{2}$.

$\because BD=BC=5,CD=6,\therefore DH=CH=\dfrac{1}{2}CD=3,$

$\therefore \cos\angle CDB=\dfrac{DH}{BD}=\dfrac{DN}{DM}=\dfrac{3}{5},\therefore DM=\dfrac{25}{6},$

$\therefore MN=\sqrt{DM^2-DN^2}=\dfrac{10}{3},$

$\therefore S_{\triangle BDM}=\dfrac{1}{2}BD\cdot MN=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{25}{3}.$



图(1)　　图(2)

(2)如图(2),过点 C 作 $CQ\perp BD$ 于点 Q,连接 AG 交 BD 于点 T,过点 B 作 $BH\perp CD$ 于点 H.

由折叠的性质得 $AG\perp EF$.

$\because EF/\!/BD,\therefore AG\perp BD,\therefore \angle ATD=90^\circ.$

同②可得 $DH=CH=\dfrac{1}{2}CD=3,$

$\therefore BH=\sqrt{BD^2-DH^2}=4,$

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot BH=\dfrac{1}{2}BD\cdot CQ,\therefore CQ=\dfrac{24}{5},$

$\therefore BQ=\sqrt{BC^2-CQ^2}=\dfrac{7}{5},\therefore DQ=BD-BQ=5-\dfrac{7}{5}=\dfrac{18}{5}.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,$\therefore AD=BC,AD/\!/CB,$

$\therefore \angle ADT=\angle CBQ.$

又$\because \angle ATD=\angle CQB=90^\circ,\therefore \triangle ADT\cong\triangle CBQ,$

$\therefore DT=BQ=\dfrac{7}{5}.$

$\because AG\perp BD,CQ\perp BD,\therefore GT/\!/CQ,$

$\therefore \triangle DGT\backsim\triangle DCQ,$

$\therefore \dfrac{DG}{DC}=\dfrac{DT}{DQ}$,即$\dfrac{DG}{6}=\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{18}{5}}$,解得 $DG=\dfrac{7}{3}.$

4.【解】(1)同学们的发现正确.理由如下:

作 $EM\perp BC$ 于点 M,如图.

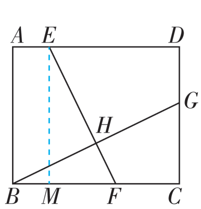
由折叠知,$EF\perp BG,\therefore \angle BHF=90^\circ,$

$\therefore \angle FBH+\angle BFH=90^\circ.$

$\because \angle EMF=90^\circ,$

$\therefore \angle MEF+\angle BFH=90^\circ,$

$\therefore \angle FBH=\angle MEF.$



又$\because \angle EMF=\angle C=90^\circ,$

$\therefore \triangle EMF\backsim\triangle BCG,\therefore \dfrac{EF}{BG}=\dfrac{EM}{BC}.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$EM\perp BC,\therefore$ 四边形 $ABME$ 是矩形,

$\therefore AB=EM,\therefore \dfrac{EF}{BG}=\dfrac{AB}{BC}.$

(2)同学们的发现正确.理由如下:

$\because CD/\!/FG,\therefore \dfrac{CD}{FG}=\dfrac{BD}{BG},\angle CDF=\angle DFG.$

由折叠知$\angle CDF=\angle BDF,\therefore \angle DFG=\angle BDF,$

$\therefore GD=GF,\therefore \dfrac{CD}{GD}=\dfrac{BD}{BG}.$

由平行四边形及折叠的性质知,$AB=BG=CD,\therefore \dfrac{BG}{GD}=\dfrac{BD}{BG},$

$\therefore$ 点 G 为 BD 的一个"黄金分割点",即 $BG^2=BD\cdot GD.$

方法技巧

折叠问题的解题方法

折叠的本质是轴对称变换,解决此类问题往往需要借助轴对称的性质、勾股定理、全等三角形的性质、相似三角形的性质或三角函数等知识.

专题 20 图形旋转问题

刷 难关

1. (1)**【证明】**设 CD 与 BF 相交于点 Q.在$\triangle ABE$和$\triangle CBD$中,

$\because AB=BC,\angle ABE=\angle CBD,BE=BD,$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBD(\text{SAS}),$

$\therefore AE=CD,\angle FAB=\angle BCD.$

$\because F$ 是 $\text{Rt}\triangle ABE$ 斜边 AE 的中点,

$\therefore AE=2BF,\therefore CD=2BF.$

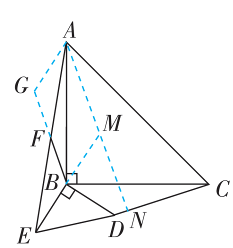
$\because BF=\dfrac{1}{2}AE=AF,\therefore \angle FAB=\angle FBA,$

$\therefore \angle FBA=\angle BCD.$

$\because \angle FBA+\angle FBC=90^\circ,\therefore \angle FBC+\angle BCD=90^\circ,\therefore \angle BQC=90^\circ,\therefore BF\perp CD.$

(2)①**【解】**延长 BF 到点 G,使 $FG=BF$,连接 AG,延长 EB 到 M,使 $BM=BE$,连接 AM 并延长交 CD 于点 N,如图.

$\because AF=EF,FG=BF,\angle AFG=\angle EFB,$



$\therefore \triangle AGF\cong\triangle EBF(\text{SAS}),$

$\therefore \angle FAG=\angle FEB,AG=BE,$

$\therefore AG/\!/BE,AG=BD,$

$\therefore \angle GAB+\angle ABE=180^\circ.$

$\because \angle ABC=\angle EBD=90^\circ,$

$\therefore \angle ABE+\angle DBC=180^\circ,$

$\therefore \angle GAB=\angle DBC.$

又$\because AB=BC,$

$\therefore \triangle AGB\cong\triangle BDC(\text{SAS}),$

$\therefore \angle ABG=\angle BCD.$

$\because F$ 是 AE 中点,B 是 EM 中点,

$\therefore BF$ 是 $\triangle AEM$ 的中位线，$\therefore BF/\!/AN$，

$\therefore \angle ABG=\angle BAN=\angle BCD$，

$\therefore \angle ABC=\angle ANC=90°$，$\therefore AN\perp CD$.

$\because BF/\!/AN$，$\therefore BF\perp CD$. 故答案为 $BF\perp CD$.

②【证明】由（2）①得 $\triangle AGB\cong\triangle BDC$（SAS），$\therefore CD=BG$.

$\because BG=2BF$，$\therefore CD=2BF$.

2.【解】题图（2）的结论是 $BM^2+NC^2+BM\cdot NC=MN^2$.

题图（3）的结论是 $BM^2+NC^2-BM\cdot NC=MN^2$.

（选择其中一个证明即可）选择题图（2）：

$\because AB=AC$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle ABC=\angle C=60°$.

将 $\triangle ACN$ 绕点 A 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle ABQ$，连接 QM，过点 Q 作 $QH\perp BC$ 交 CB 的延长线于 H，如图（1），

则 $AN=AQ$，$CN=BQ$，$\angle CAN=\angle QAB$，$\angle ABQ=\angle C=60°$.

又 $\because \angle CAN+\angle BAM=30°$，

$\therefore \angle BAM+\angle QAB=30°$，即 $\angle QAM=\angle MAN$.

又 $\because AM=AM$，$\therefore \triangle AQM\cong\triangle ANM$（SAS），$\therefore MN=QM$.

$\because \angle ABQ=60°$，$\angle ABC=60°$，

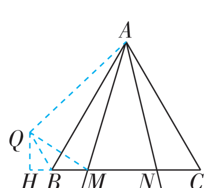
$\therefore \angle QBH=60°$，$\therefore \angle BQH=30°$，

$\therefore BH=\frac{1}{2}BQ$，$QH=\frac{\sqrt{3}}{2}BQ$，$\therefore HM=BM+BH=BM+\frac{1}{2}BQ$.

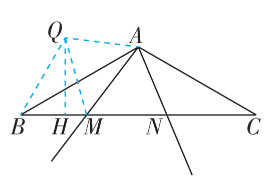
在 Rt $\triangle QHM$ 中，$QH^2+HM^2=QM^2$，即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}BQ\right)^2+\left(BM+\frac{1}{2}BQ\right)^2=QM^2$，

整理得 $BM^2+BQ^2+BM\cdot BQ=QM^2$，

$\therefore BM^2+NC^2+BM\cdot NC=MN^2$.



图（1）



图（2）

选择题图（3）：$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\therefore \angle ABC=\angle C=30°$.

将 $\triangle ANC$ 绕点 A 顺时针旋转 $120°$ 得到 $\triangle AQB$，连接 QM，过点 Q 作 $QH\perp BC$，垂足为 H，如图（2），

则 $AN=AQ$，$CN=BQ$，$\angle CAN=\angle QAB$，$\angle ABQ=\angle C=30°$.

$\because \angle CAN+\angle BAM=60°$，$\therefore \angle BAM+\angle QAB=60°$，即 $\angle QAM=\angle MAN$.

又 $\because AM=AM$，$\therefore \triangle AQM\cong\triangle ANM$（SAS），$\therefore MN=QM$.

在 Rt$\triangle BQH$ 中，$\because \angle QBH=\angle ABQ+\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle BQH=30°$，

$\therefore BH=\frac{1}{2}BQ$，$QH=\frac{\sqrt{3}}{2}BQ$，$\therefore HM=BM-BH=BM-\frac{1}{2}BQ$.

在 Rt $\triangle QHM$ 中，$QH^2+HM^2=QM^2$，即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}BQ\right)^2+\left(BM-\frac{1}{2}BQ\right)^2=QM^2$，

整理得 $BM^2+BQ^2-BM\cdot BQ=QM^2$，

$\therefore BM^2+NC^2-BM\cdot NC=MN^2$.

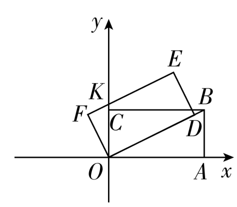
3.【解】（1）$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，$B(4,2)$，$\therefore OA/\!/BC$，$OA=4$，$AB=2$，$\angle B=90°$，$\therefore \angle GOA+\angle OGB=180°$.

$\because \angle OGA+\angle OGB=180°$，$\therefore \angle OGA=\angle GOA$，$\therefore AG=OA=4$.

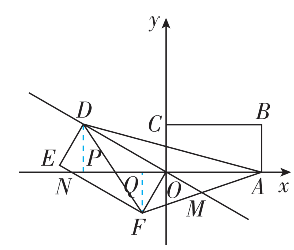
又 $\because \angle B=90°$，$AB=2$，$\therefore \cos\angle BAG=\frac{AB}{AG}=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle BAG=60°$.

（2）如图（1），$\because \angle FOB=\angle COA=90°$，$\therefore \angle FOK=90°-\angle BOK=\angle AOB$，$\therefore \tan\angle FOK=\frac{FK}{OF}=\tan\angle AOB=\frac{AB}{OA}=\frac{1}{2}$. $\because$ 四边形 $OABC$，$ODEF$ 是两个完全相同的矩形，$\therefore OF=AB=2$，$EF=OA=4$，$\therefore \frac{FK}{2}=\frac{1}{2}$，解得 $FK=1$，$\therefore EK=EF-FK=4-1=3$，

$\therefore \frac{FK}{EK}=\frac{1}{3}$.



图（1）



图（2）

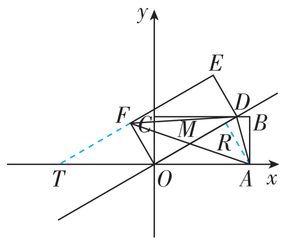
（3）$\triangle ADF$ 的面积为 $8+2\sqrt{3}$ 或 $8-2\sqrt{3}$.

如图（2），当直线 DO 经过点 M 时，$\because$ 四边形 $OABC$，$ODEF$ 是完全相同的两个矩形，$B(4,2)$，$\therefore OA=BC=OD=EF=4$，$OC=AB=OF=ED=2$，$\angle FOD=\angle OFE=90°$，$OM/\!/EF$. 设 EF 与 x 轴的交点为 N，则 $\frac{AM}{MF}=\frac{AO}{ON}$. $\because AM=FM$，$\therefore AO=ON=4$.

$\because \sin\angle FNO=\frac{OF}{ON}=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle FNO=30°$，$\therefore \angle FON=60°$.

$\because OM/\!/NF$，$\therefore \angle DON=\angle FNO=30°$. 过点 F 作 $FQ\perp AN$ 于点 Q，过点 D 作 $DP\perp AN$ 于点 P，$\therefore FQ=OF\cdot\sin\angle FON=2\sin 60°=\sqrt{3}$，$DP=OD\cdot\sin\angle DON=4\sin 30°=2$，$\therefore S_{\triangle ADF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle AOD}+S_{\triangle DOF}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times2=8+2\sqrt{3}$.

如图（3），当点 M 在线段 DO 上时，延长 EF，与 x 轴的交点为 T，则 $OM/\!/TF$，$\therefore \frac{AM}{MF}=\frac{AO}{OT}$. $\because AM=FM$，$\therefore AO=OT=4$，$\therefore OM=\frac{1}{2}TF$. $\because \sin\angle FTO=\frac{OF}{OT}=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle FTO=30°$. 过点 A 作 $AR\perp OD$ 于点 R.



图(3)

$\because \dfrac{FO}{FT}=\tan\angle FTO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore FT=2\sqrt{3}$，$\therefore OM=\dfrac{1}{2}FT=\sqrt{3}$，

$\therefore DM=OD-OM=4-\sqrt{3}$.

在$\triangle FOM$和$\triangle ARM$中，$\begin{cases}\angle FOM=\angle ARM,\\ \angle FMO=\angle AMR,\\ FM=AM,\end{cases}$ $\therefore \triangle FOM\cong\triangle ARM$

(AAS)，$\therefore AR=FO=2$，$\therefore S_{\triangle ADF}=S_{\triangle MDF}+S_{\triangle MDA}=\dfrac{1}{2}\times(4-\sqrt{3})(2+2)=8-2\sqrt{3}$.

综上所述，$\triangle ADF$的面积为$8+2\sqrt{3}$或$8-2\sqrt{3}$.

4.【解】(1)$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore \angle OAB=\angle DAC=45°$，$AD=\sqrt{2}OA$，$\therefore$旋转角为$45°$，$k=\dfrac{AD}{OA}=\sqrt{2}$，

故答案为$45°$，$\sqrt{2}$.

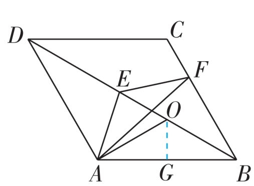
(2)如题图(2)，根据题意得$\triangle AEF\backsim\triangle AOB$，

$\therefore \angle EAF=\angle OAB$，$\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AE}{AO}$，$\therefore \angle FAB=\angle EAO$，$\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AB}{AO}$，

$\therefore \triangle AFB\backsim\triangle AEO$，$\therefore \dfrac{BF}{OE}=\dfrac{AB}{AO}$.

$\because \angle OAB=45°$，$\angle AOB=90°$，$\therefore \dfrac{AB}{AO}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{BF}{OE}=\dfrac{AB}{AO}=\sqrt{2}$.

(3)$\dfrac{BF}{OE}$的值与α无关.



理由：如图，同(2)可证$\triangle AFB\backsim\triangle AEO$，$\therefore \dfrac{BF}{OE}=\dfrac{AB}{AO}$.

$\because$菱形$ABCD$中，$\angle ABC=60°$，$\therefore \angle ABO=30°$.

$\because O$是AB的垂直平分线与BD的交点，$\therefore AO=BO$，

$\therefore \angle BAO=\angle ABO=30°$.

过点O作$OG\perp AB$于点G，$\therefore AB=2BG$，$\cos\angle ABO=\dfrac{BG}{OB}=\dfrac{BG}{OA}=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \dfrac{AB}{OA}=\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{BF}{OE}=\dfrac{AB}{AO}=\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{BF}{OE}$的值与$\alpha$无关.

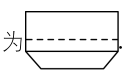
(4)同(3)可证，$\angle BAO=\angle OBA=\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{BF}{OE}=\dfrac{AB}{OA}=2\cos\dfrac{\beta}{2}$，$OA=OB$，$\therefore BF=OE\cdot 2\cos\dfrac{\beta}{2}$，$BA=OB\cdot 2\cos\dfrac{\beta}{2}$.

$\because BE=OE+OB$，$\therefore BF+BA=OE\cdot 2\cos\dfrac{\beta}{2}+OB\cdot 2\cos\dfrac{\beta}{2}=2(OE+OB)\cos\dfrac{\beta}{2}=2BE\cos\dfrac{\beta}{2}$，即$BF+BA=2BE\cos\dfrac{\beta}{2}$.

C 检测验收练

刷速度

1. B 【解析】A选项，该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；B选项，该图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；C选项，该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；D选项，该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意. 故选B.

2. C 【解析】左视图为. 故选C.

易错警示

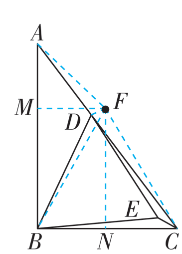
画三视图时的注意事项

能看到的线用实线表示，不能看到的线用虚线表示.

3. D 【解析】

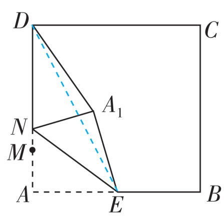
选项	解析	选项正误
A	由作图方法可得$\angle B=\angle DCB=45°$	√
B、C	$\because \angle B=\angle DCB=45°$，$\therefore \angle BDC=180°-\angle B-\angle DCB=90°$，$BD=DC$	√
D	$\because \angle A>\angle ACB$，$\therefore BC>AB$. $\because AD+DC=AD+BD=AB$，$\therefore AD+DC<BC$	×

4. B 【解析】如图，以BC为边在BC上方作等边三角形BCF，连接AF，DF. 由题可知，$BD=BE$，$\angle DBE=60°$. $\because \triangle BCF$是等边三角形，$\therefore BF=BC$，$\angle FBC=60°$，$\therefore \angle DBF=\angle EBC=60°-\angle EBF$，$\therefore \triangle DBF\cong\triangle EBC$(SAS)，$\therefore CE=DF$. 当$DF\perp AC$时，$DF$的值最小，即$CE$的值最小. 过$F$作$FM\perp AB$于$M$，$FN\perp BC$于$N$，则四边形$FMBN$是矩形. $\because \angle ABC=90°$，$BC=5$，$\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore AB=\dfrac{20}{3}$，$AC=\dfrac{25}{3}$. $\because BC=5$，$\therefore$易得等边三角形BCF的高为$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，$FM=BN=\dfrac{5}{2}$. $\because S_{\text{四边形}ABCF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BFC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{3}\times\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{3}\times5+\dfrac{1}{2}\times$

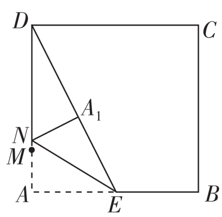


$\frac{25}{3}\times DF_{\min}$，∴ $DF_{\min}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$，∴ CE 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$. 故选 B.

5. C　【解析】∵ 正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 4，$AE=BE$，∴ $AE=BE=\frac{1}{2}AB=2$. 由折叠的性质可知，$A_1E=AE=2$，∴ 当点 N 在线段 MD 上运动时，点 A_1 在以 E 为圆心，半径为 2 的圆弧上运动，故①正确. 连接 DE，如图(1). 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle A=90°$，$AD=4$，$AE=2$，∴ 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=2\sqrt{5}$. ∵ $DA_1+A_1E\geqslant DE$，∴ $DA_1\geqslant DE-A_1E=2\sqrt{5}-2$，∴ DA_1 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$，故③正确.



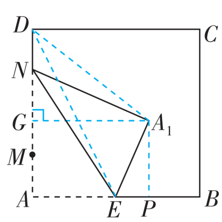
图(1)



图(2)

如图(2)，DA_1 达到最小值时，点 A_1 在线段 DE 上，由折叠可得 $\angle NA_1E=\angle A=90°$，∴ $\angle DA_1N=90°$，∴ $\angle DA_1N=\angle A$. ∵ $\angle A_1DN=\angle ADE$，∴ $\triangle A_1DN\backsim\triangle ADE$，∴ $\frac{A_1D}{AD}=\frac{DN}{DE}$，即 $\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{DN}{2\sqrt{5}}$，∴ $DN=5-\sqrt{5}$，∴ $MN=AD-DN-AM=4-(5-\sqrt{5})-1=\sqrt{5}-2$，故④错误.

连接 DE，A_1D，过点 A_1 作 $A_1G\perp AD$ 于点 G，作 $A_1P\perp AB$ 于点 P，如图(3).



图(3)

在$\triangle A_1DE$ 中，$DE=2\sqrt{5}$，$A_1E=AE=2$，

∴ A_1D 随着 $\angle DEA_1$ 的增大而增大.

∵ $\angle DEA_1=\angle NEA_1-\angle NED=\angle NEA-\angle NED=\angle NEA-(\angle AED-\angle NEA)=2\angle NEA-\angle AED$，∴ 当 $\angle NEA$ 最大时，$\angle DEA_1$ 最大，即 A_1D 取得最大值，此时，点 N 与点 D 重合.

∵ $\angle A=\angle A_1GA=\angle A_1PA=90°$，∴ 四边形 AGA_1P 是矩形，

∴ $A_1G=AP=AE+EP$.

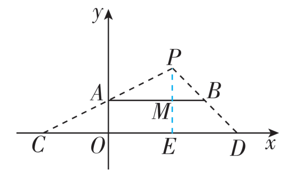
∵ $\angle A_1EP=180°-\angle AEN-\angle A_1EN=180°-2\angle AEN$，当 A_1D 取得最大值时，$\angle AEN$ 也取得最大值，∴ $\angle A_1EP$ 取得最小值，

∴ 在 Rt$\triangle A_1EP$ 中，$EP=A_1E\cdot\cos\angle A_1EP$ 取得最大值，

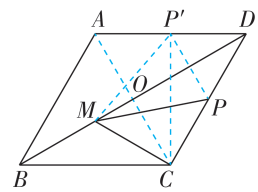
即 $A_1G=AP=AE+EP$ 取得最大值，即点 A_1 到 AD 的距离最大，故②正确. 综上所述，正确的共有 3 个. 故选 C.

6. 6　【解析】由作图可知 BP 平分 $\angle ABC$. ∵ AD 是边 BC 上的高，$MN\perp AB$，$MN=2$，∴ $MD=MN=2$. ∵ $AD=4MD$，∴ $AD=8$，∴ $AM=AD-MD=6$，故答案为 6.

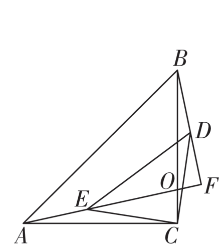
7. 6　【解析】过 P 作 $PE\perp x$ 轴于 E，交 AB 于 M，如图. ∵ $P(2,2)$，$A(0,1)$，$B(3,1)$，∴ $PM=1$，$PE=2$，$AB=3$. ∵ $AB/\!/CD$，∴ $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$，∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{PM}{PE}$，∴ $\frac{3}{CD}=\frac{1}{2}$，∴ $CD=6$，故答案为 6.



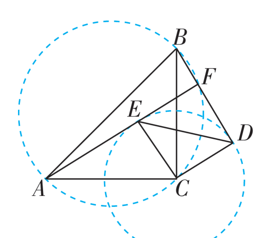
8. $2\sqrt{3}$　【解析】如图，作点 P 关于 BD 的对称点 P'，连接 CP'，MP'，则 $MP=MP'$，∴ $PM+CM=P'M+CM\geqslant CP'$，∴ $PM+CM$ 的最小值即为 CP' 的长. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=4$，P 为 CD 中点，∴ 点 P' 落在 AD 边上，且是 AD 的中点，$AD=DC=4$，∴ $DP'=\frac{1}{2}AD=2$. 连接 AC 交 BD 于点 O. ∵ $BD=4\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AC\perp BD$，$BO=DO=2\sqrt{3}$，$\angle ADO=\angle CDO$，∴ $\cos\angle ADO=\frac{OD}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\angle ADO=30°$，∴ $\angle ADC=60°$，∴ $\triangle ADC$ 为等边三角形，∴ $CP'\perp AD$，∴ $CP'=\sqrt{CD^2-P'D^2}=2\sqrt{3}$，∴ $PM+CM$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$. 故答案为 $2\sqrt{3}$.



9. 90　14　【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$\angle DCE=90°$，∴ $\angle ACB-\angle ECB=\angle DCE-\angle ECB$，∴ $\angle ACE=\angle BCD$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ EC=DC,\end{cases}$ ∴ $\triangle ACE\cong\triangle BCD$(SAS)，∴ $\angle CAE=\angle CBD$. 设 AF，BC 交于点 O，如图(1). ∵ $\angle COA=\angle BOF$，∴ $\angle F=\angle ACB=90°$，∴ 点 F 在以 AB 为直径的圆上运动. ∵ $AC=BC=10$ cm，∴ $AB=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ (cm)，∴ 易得点 C 到 AB 的距离为 $\frac{1}{2}AB=5\sqrt{2}$ cm$>CE$，即弦 AF 始终在直径 AB 的下方，如图(2).



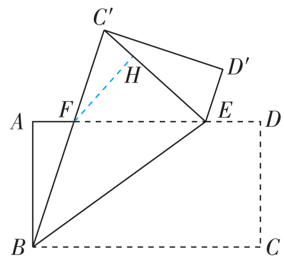
图(1)



图(2)

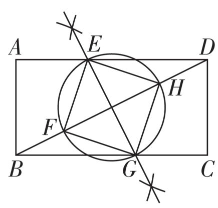
易知 D，E 两点在以 C 为圆心，6 cm 长为半径的⊙C 上，∴ 当 AE 与⊙C 相切于点 E 时，AF 取最大值，此时 $\angle ECD=\angle CEF=\angle EFD=90°$，$CD=CE$，∴ 四边形 $CDFE$ 为正方形，∴ $EF=CE=6$ cm，∴ $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ (cm)，∴ AF 的最大值为 $AE+EF=8+6=14$ (cm). 故答案为 90，14.

10. $\frac{13}{6}$ $\frac{11\sqrt{5}}{15}$ 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD=BC=4$，$\angle A=90°$. ∵ E 为 AD 边的四等分点，∴ $DE=\frac{1}{4}\times4=1$，∴ $AE=3$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle AEB=\angle CBE$. 由折叠知，$\angle CBE=\angle FBE$，∴ $\angle FBE=\angle BEF$，∴ $BF=EF$. ∵ $AB^2+AF^2=BF^2$，



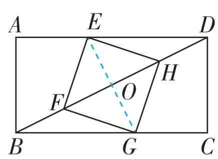
∴ $2^2+(3-EF)^2=EF^2$，∴ $EF=\frac{13}{6}$，∴ $C'F=4-\frac{13}{6}=\frac{11}{6}$. 由折叠知，$C'D'=CD=2$，$\angle D'=\angle D=\angle C=\angle D'C'F=90°$，$D'E=DE=1$，∴ $EC'=\sqrt{D'E^2+C'D'^2}=\sqrt{5}$. 如图，过 F 作 $FH\perp C'E$ 于 H，∴ $\angle FHC'=\angle D'=90°$. ∵ $\angle C'FH+\angle FC'H=\angle FC'H+\angle D'C'E=90°$，∴ $\angle C'FH=\angle D'C'E$，∴ $\triangle C'FH\backsim\triangle EC'D'$，∴ $\frac{C'F}{C'E}=\frac{FH}{C'D'}$，∴ $\frac{\frac{11}{6}}{\sqrt{5}}=\frac{FH}{2}$，∴ $FH=\frac{11\sqrt{5}}{15}$. 故答案为 $\frac{13}{6}$，$\frac{11\sqrt{5}}{15}$.

11.【解】(1) 如图(1)所示，正方形 $EFGH$ 即为所求.



图(1)

(2) 连接 EG 交 BD 于点 O，如图(2)所示.



图(2)

∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴ $OE=OF=OG=OH$，$EG\perp BD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD/\!/BC$，$\angle A=90°$，∴ $\angle ADB=\angle DBC$.

又∵ $\angle DOE=\angle BOG$，∴ $\triangle DOE\cong\triangle BOG$(AAS)

∴ $OB=OD$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

∴ $OB=OD=\sqrt{5}$.

∵ $\angle DOE=\angle A=90°$，$\angle ODE=\angle ADB$，

∴ $\triangle DOE\backsim\triangle DAB$，∴ $\frac{OE}{AB}=\frac{OD}{AD}$，即 $\frac{OE}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$，

∴ $OE=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

在 Rt$\triangle EOH$ 中，$EH=\sqrt{2}OE=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

即正方形 $EFGH$ 的边长为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

12.【解】(1) $BE=CG$，$BE\perp CG$. 理由如下：由题意得，点 C 和点 F 关于 BE 对称，∴ BE 垂直平分 CF，∴ $BE\perp CG$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BCD=\angle D=90°$，$BC=CD$，

∴ $\angle DCG+\angle BCF=\angle CBE+\angle BCF=90°$，∴ $\angle DCG=\angle CBE$，

∴ $\triangle BCE\cong\triangle CDG$(ASA)，∴ $BE=CG$.

(2) 由(1)知，BE 垂直平分 CF，∴ $BE\perp CF$，O 是 CF 的中点.

∵ E 是 CD 的中点，∴ OE 是 $\triangle CFD$ 的中位线，∴ $FD=2OE$，$FD/\!/OE$，∴ $DF\perp CF$，∴ $\angle DFO=90°$. 由(1)知 $\angle CBE=\angle DCF$，∴ $\tan\angle CBE=\tan\angle DCF$，∴ $\frac{CE}{BC}=\frac{OE}{OC}=\frac{OC}{OB}$. ∵ $CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}BC$，∴ $OC=2OE$，$OB=2OC$，∴ $FO=OC=2OE$，

∴ $FD=FO$，∴ $\triangle FOD$ 是等腰直角三角形，∴ $OD=\sqrt{2}OF$.

∵ $OB=2OC=2OF$，∴ $\frac{BO}{DO}=\sqrt{2}$.

13.【解】(1) ∵ $\angle ACB=\angle EDF=90°$，且 $AC=BC=DF=DE=2$，

∴ $\angle A=\angle B=\angle DFE=45°$，

∴ $\angle AFH+\angle BFG=\angle BFG+\angle FGB=135°$，

∴ $\angle AFH=\angle FGB$，∴ $\triangle AFH\backsim\triangle BGF$，

∴ $\frac{AF}{BG}=\frac{AH}{BF}$，∴ $AH\cdot BG=AF\cdot BF$.

在 Rt$\triangle ACB$ 中，$AC=BC=2$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.

∵ O 是 AB 的中点，点 O 与点 F 重合，

∴ $AF=BF=\sqrt{2}$，∴ $xy=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，∴ $y=\frac{2}{x}$，

∴ y 与 x 之间满足的函数关系式为 $y=\frac{2}{x}(1<x<2)$.

(2) $\triangle CGH$ 的周长为 2 cm，理由如下：

∵ $AC=BC=2$，$AH=x$，$BG=y$，∴ $CH=2-x$，$CG=2-y$，

∴ 在 Rt$\triangle HCG$ 中，$GH=\sqrt{CH^2+CG^2}=\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(x+y)^2-2xy-4(x+y)+8}$.

将(1)中 $xy=2$ 代入得 $GH=\sqrt{(x+y)^2-4(x+y)+4}=\sqrt{(x+y-2)^2}=|x+y-2|$.

∵ $1<x<2$，$y=\frac{2}{x}$，∴ $1<y<2$，∴ $x+y>2$，∴ $GH=x+y-2$，

∴ $\triangle CHG$ 的周长为 $CH+CG+GH=2-x+2-y+x+y-2=2$(cm).

(3) ①当 EF 与 AC 边相交时，设交点为 H，过点 F 作 $FN\perp AC$ 于点 N，作 FH 的垂直平分线交 FN 于点 M，连接 MH，如

图(1). ∵ $\angle AFE=60^\circ$, $\angle A=45^\circ$, ∴ $\angle AHF=75^\circ$.

由垂直平分线的性质得 $FM=MH$.

∵ $\angle FNH=90^\circ$,

∴ $\angle NFH=15^\circ$.

∵ $FM=MH$,

∴ $\angle NFH=\angle MHF=15^\circ$,

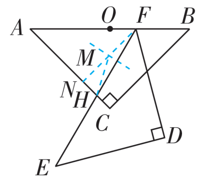
∴ $\angle NMH=30^\circ$.

在 Rt$\triangle MNH$ 中,设 $NH=k$,

∴ $MH=MF=2k$,

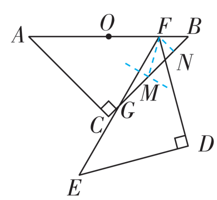
∴ $MN=\sqrt{3}k$, ∴ $FN=MF+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt$\triangle FNH$ 中, $\tan\angle FHN=\dfrac{FN}{NH}=2+\sqrt{3}$.



图(1)

②当 EF 与 BC 边相交时,设交点为 G,过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N,作 FG 的垂直平分线交 BG 于点 M,连接 FM,如图(2).



图(2)

∵ $\angle AFE=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$,

∴ $\angle FGB=\angle AFE-\angle B=15^\circ$.

由垂直平分线的性质得 $GM=MF$,

∴ $\angle FGB=\angle GFM=15^\circ$,

∴ $\angle FMB=30^\circ$.

在 Rt$\triangle FNM$ 中,设 $FN=k$, ∴ $GM=MF=2k$,

由勾股定理得 $MN=\sqrt{3}k$,

∴ $GN=GM+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt$\triangle FNG$ 中, $\tan\angle FGN=\dfrac{FN}{GN}=2-\sqrt{3}$.

综上所述, $\triangle DEF$ 纸片的斜边 EF 与 $\triangle ABC$ 纸片的直角边所夹锐角的正切值为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

故答案为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

图形与几何综合训练

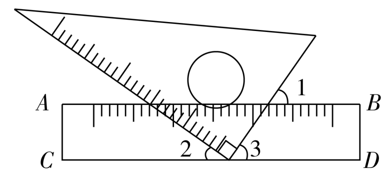
刷 综合

1. A 【解析】

选项	理由	结论
A	是轴对称图形,但不是中心对称图形	符合题意
B	是轴对称图形,也是中心对称图形	不符合题意
C	是轴对称图形,也是中心对称图形	不符合题意
D	不是轴对称图形,是中心对称图形	不符合题意

2. A 【解析】根据主视图和俯视图可知,该几何体为 A 选项中的图形. 故选 A.

3. B 【解析】如图, ∵ $\angle 1=55^\circ$, $AB/\!/CD$, ∴ $\angle 3=\angle 1=55^\circ$, ∴ $\angle 2=180^\circ-90^\circ-\angle 3=35^\circ$. 故选 B.

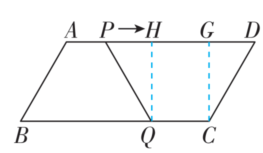


4. B 【解析】∵ $\angle C=90^\circ$, $\angle B=40^\circ$, ∴ $\angle BAC=90^\circ-\angle B=90^\circ-40^\circ=50^\circ$. 由作图知 AP 平分 $\angle BAC$, ∴ $\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times50^\circ=25^\circ$. 又∵ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD$, ∴ $\angle ADC=40^\circ+25^\circ=65^\circ$. 故选 B.

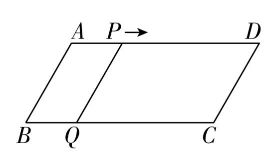
5. B 【解析】由已知可得, P 从 A 到 D 需要 12 s, Q 从 C 到 B (或从 B 到 C) 需要 4 s. 设 P, Q 的运动时间为 t s.

①当 $0\leqslant t\leqslant4$ 时,(i)点 Q 在点 P 右侧时,过 Q 作 $QH\perp AD$ 于 H,过 C 作 $CG\perp AD$ 于 G,如图(1). 易得四边形 $HQCG$ 为矩形, $AP=t$ cm, $CQ=3t$ cm, ∴ $GH=3t$ cm. ∵ $PD/\!/CQ$, $PQ=CD$, ∴ 四边形 $CQPD$ 是等腰梯形, ∴ $\angle QPH=\angle D=\angle B=60^\circ$, ∴ $\angle PQH=\angle GCD=30^\circ$. ∵ $PQ=CD=AB=6$ cm, ∴ $PH=\dfrac{1}{2}PQ=3$ cm, $DG=\dfrac{1}{2}CD=3$ cm. ∵ $AP+PH+GH+DG=AD=BC=12$ cm, ∴ $t+3+3t+3=12$, 解得 $t=1.5$.

(ii)点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(2). 此时 $PD=CQ=3t$ cm, ∴ $t+3t=12$, 解得 $t=3$, ∴ 运动时间为 1.5 s 或 3 s 时, $PQ=CD$.



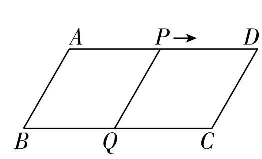
图(1)



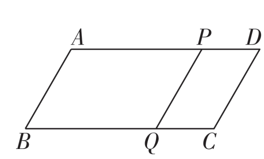
图(2)

②当 $4<t\leqslant8$ 时,(i)点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(3). 此时 $BQ=3(t-4)$ cm, $AP=t$ cm. ∵ $AD=BC$, $PD=CQ$, ∴ $BQ=AP$, ∴ $3(t-4)=t$, 解得 $t=6$.

(ii)点 Q 在点 P 右侧时,由①知,此时四边形 $CQPD$ 是以 CD, PQ 为腰的等腰梯形,这种情况在 $4<t\leqslant8$ 时不存在, ∴ 运动时间为 6 s 时, $PQ=CD$.



图(3)



图(4)

③当 $8<t\leqslant12$ 时,(i)点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(4). 此时 $CQ=3(t-8)$ cm, $PD=(12-t)$ cm,